Suites numériques - Correction

Exercice 1

Soit la suite numérique u_n définie par : $u_n = 5 - 2n$

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

$$u_0 = 5$$

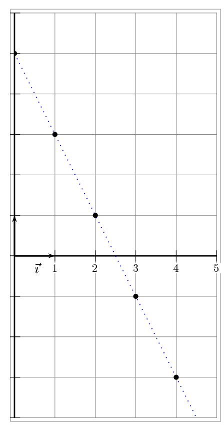
$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 1$$

$$u_3 = -1$$

$$u_4 = -3$$

2. Représenter graphiquement la suite u_n.



3. Conjecturer que cette suite est arithmétique dont on précisera la raison.

   On remarque que la différence de deux termes consécutifs de la suite est constante et égale à -2.
   Donc, c'est une suite arithmétique de raison $r = -2$.

4. Calculer u_{100}.

   Comme c'est une suite arithmétique, on applique une des deux formules au choix :

$$u_{100} = u_0 + 100 \times (-2) = 5 + 100 \times (-2) = 5 - 200 = -195$$

   Ou bien :

$$u_{100} = u_1 + (100 - 1) \times (-2) = 3 + 99 \times (-2) = 3 - 198 = -195.$$

5. Calculer la somme des 100 premiers termes de cette suite.

   Encore une fois, on applique la formule du cours, mais attention, les 100 premiers termes en comptant le u_0, cela veut dire jusqu'au $u_9 9$.

$$u_{99} = u_0 + 99 \times (-2) = 5 - 198 = -193$$

   Donc :

$$\sum_{n=0}^{99} u_n = \frac{(99+1)(5+u_9 9)}{2} = -\frac{18800}{2} = -9400$$

6. Donner les variations de cette suite.

   On a :

$$u_n = 5 - 2n$$

$$u_{n+1} = 5 - 2(n+1) = 5 - 2n - 2 = 3 - 2n$$

   Or, on sait très bien que :

$$u_n = 5 - 2n > 3 - 2n = u_{n+1}$$

   Donc, la suite est décroissante.
   D'ailleurs, cela se voyait très bien lorsque l'on a calculé les premiers termes de la suite.

Exercice 2

Soit la suite numérique u_n définie par : $u_n = (n+1)^2 - n^2$

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 5$$

$$u_3 = 7$$

$$u_4 = 9$$

2. Cette suite est-elle arithmétique ? Si oui, précisez la raison.

   On remarque que la différence de deux termes consécutifs de la suite est constante et égale à 2.
   Donc, c'est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

3. Calculer u_{99}.

   Comme c'est une suite arithmétique, on applique une des deux formules :

$$u_{99} = u_0 + 99 \times 2 = 1 + 99 \times 2 = 1 + 198 = 199$$

4. Calculer la somme suivante : $S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 195 + 197 + 199$.

   C'est la somme des $99 + 1 = 100$ premiers termes de la suite car $1 = u_0$ et $199 = u_9 9$.
   Utilisons donc la formule du cours.

$$\sum_{n=0}^{99} u_n = \frac{(99+1)(1+u_9 9)}{2} = \frac{20000}{2} = 10000$$

5. Donner les variations de cette suite.

   On a :

$$u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

$$u_{n+1} = [(n+1)+1]^2 - (n+1)^2 = (n+2)^2 - (n+1)^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 = 2n + 3$$

   Or, on sait très bien que :

$$u_n = 2n + 1 < 2n + 3 = u_{n+1}$$

   Donc, la suite est croissante.
   D'ailleurs, cela se voyait très bien lorsque l'on a calculé les premiers termes de la suite.

Exercice 3

Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - \frac{3}{4} \\ u_0 & = & 2 \end{array}\right.$$

1. Cette suite est-elle arithmétique ? Si oui, précisez la raison.

   Déjà, la forme de la suite nous permet de conjecturer que c'est une suite arithmétique. En effet, elle est de la forme : $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r = -\frac{3}{4}$.
   Vérifions en calculant les cinq premiers termes de cette suite.

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = \frac{5}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = -\frac{1}{4}$$

$$u_4 = -1$$

$$u_5 = -\frac{7}{4}$$

   Cela se confirme.

2. Calculer u_{1000}.

   Comme c'est une suite arithmétique, on applique une des deux formules :

$$u_{1000} = u_0 + 1000 \times (-\frac{3}{4}) = 2 + \frac{3000}{4} = 2 + 750 = 752$$

3. Calculer la somme des 50 premiers termes de cette suite.

   Attention, les 50 premiers termes vont du u_0 au $u_4$9.
   Calculons ce u_{49} :

$$u_{49} = u_0 + 49 \times (-\frac{3}{4}) = 2 - \frac{147}{4} = \frac{-143}{4}$$

   Utilisons à présent la formule du cours.

$$\sum_{n=0}^{49} u_n = \frac{(49+1)(1+u_{49})}{2} = \frac{50 \times \frac{-141}{2}}{2} = -\frac{3525}{2} = 1762,5$$

4. Donner les variations de cette suite.

   Nous avons :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{3}{4}$$

   Cela se voit très bien :

$$u_{n+1} > u_n$$

   Oui, car à chaque terme suivant $(n+1)$, on enlève la quantité $-\frac{3}{4}$. Donc, la suite est décroissante.
   D'ailleurs, cela se voyait très bien lorsque l'on a calculé les premiers termes de la suite.

Exercice 4

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = -2$.

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

   C'est une suite arithmétique. Donc : $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$u_3 = u_2 - 2 = -1 - 2 = -3$$

$$u_4 = -5$$

$$u_5 = -7$$

$$u_6 = -9$$

2. Calculer u_{20}.
   Utilisons encore une fois la formule de la suite arithmétique.

$$u_{20} = u_3 + (20 - 3) \times (-2) = -3 - 34 = -37$$

3. Calculer la somme des 20 premiers termes de cette suite.

   On utilise la formule du cours tout simplement.

$$\sum_{n=1}^{20} u_n = \frac{(20)(1 + u_{20})}{2} = \frac{20 \times (-36)}{2} = -\frac{720}{2} = -360$$

   Oui, attention, il y a 20 termes, donc on remplace le $(n+1)$ de la formule par un n car cela représente le nombre de terme.

Exercice 5

Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{2}{3}u_n - 1 \\ u_0 & = & -\frac{3}{2} \end{cases}$$

1. La suite $v_n = 2u_n + 6$ est-elle géométrique ? Si oui, précisez la raison.

   Essayons de trouver v_{n+1} en fonction de v_n.

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} + 6 = 2(\frac{2}{3}u_n - 1) + 6 = \frac{4}{3}u_n - 2 + 6 = \frac{4}{3}u_n + 4 = \frac{2}{3}(2u_n + 6) = \frac{2}{3}v_n$$

   Donc, la suite v_n est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

2. Donner les variations des suites u_n et v_n.

   Commençons par u_n et calculons la quantité $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n - 1 = -(\frac{1}{3}u_n + 1) \leqslant 0$$

   Donc, la suite u_n est décroissante.

   Calculons la quantité $v_{n+1} - v_n$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}v_n - v_n = -\frac{1}{3}u_n \leqslant 0$$

   Donc, la suite v_n est décroissante elle aussi.

Exercice 6

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.
1er contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.
2ème contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.

   (a) Premier contrat :
   Cela correspond à la suite suivante :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & 200 \\ u_{n+1} & = & u_n + 5 \end{array}\right.$$
   C'est la forme d'une suite arithmétique de raison $r = 5$.
   Calculons u_2 et u_3.
   $$u_2 = u_1 + 5 = 200 + 5 = 205$$
   $$u_3 = u_2 + 5 = 205 + 5 = 210$$
   Le second loyer s'élèvera à 205 euros et le suivant à 210 euros.

   (b) Second contrat :
   Cela correspond à la suite suivante :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & 200 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0,02u_n = 1,02u_n \end{array}\right.$$
   Chaque mois, on augmente de $0,02 = 2\%$ le loyer.
   C'est la forme d'une suite géométrique de raison $q = 1,02$.
   Calculons u_2 et u_3.
   $$u_2 = 1,02u_1 = 1,02 \times 200 = 204$$
   $$u_3 = 1,02u_2 = 1,02 \times 204 = 208,08$$
   Le second loyer s'élèvera à 204 euros et le suivant à 208,08 euros.

2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36ème mois).

   (a) Premier contrat :
   C'est une suite arithmétique de raison $r = 5$.
   Calculons u_36 grâce à la formule du cours.
   $$u_36 = u_0 + 36 \times 5 = 200 + 180 = 380$$
   Le loyer du dernier mois s'élèvera à 380 euros.

   (b) Second contrat :
   C'est une suite géométrique de raison $q = 1,02$.
   Calculons u_{36} grâce à la formule du cours.
   $$u_{36} = u_0 \times (1,02)^{36} = 200 \times 2,04 = 408$$
   Le loyer du dernier mois s'élèvera à 408 euros.

3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs)

   Calculons le prix total du loyer pour les 3 ans des deux contrats en faisant la somme de 1 à 36 pour chacune des deux suites.
   Attention : on remplacera le $(n+1)$ de la formule par un n car cela représente le nombre de terme et là on en a 36 et non $36 + 1 = 37$.

(a) Premier contrat :

$$\sum_{n=1}^{36} u_n = \frac{(36)(1+u_{36})}{2} = \frac{36 \times 580}{2} = \frac{20880}{2} = 10440$$

(b) Second contrat :

$$\sum_{n=1}^{36} u_n = u_0 \times \frac{1-q^{36}}{1-q} = 200 \times \frac{1-1,02^{36}}{1-1,02} = 200 \times \frac{1-2,04}{-0,02} = 200 \times \frac{-1,04}{-0,02} = 200 \times 52 = 10400$$

Le second contrat est meilleur car moins coûteux.

Exercice 7

La population actuelle augmente de 1% par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards.
On note u_n la population mondiale l'année 2010+n.

1. Expliquer pourquoi la suite u_n est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

   Le problème revient à étudier la suite suivante :

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 6,9 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0,01u_n = 1,01u_n \end{array} \right.$$

   Chaque année, on augment de $0,01 = 1\%$ la population.
   C'est la forme d'une suite géométrique de raison $q = 1,01$.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

   Suite géométrique de raison $q = 1,01$, donc : $u_n = u_0 \times (1,01)^n = 6,9 \times (1,01)^n$.

3. En supposant que le taux d'accroissement se maintienne, estimer la population mondiale en 2025.

   Il suffit de calculer le u_{15} (oui car 2010+15=2025) en appliquant la formule que nous avons établis à la question précédente.

   $$u_{15} = 6,9 \times (1,01)^{15} = 6,9 \times 1,16 = 8,01$$

   Donc, en 2025, si le taux d'accroissement se maintient, il y aura 8,85 milliard de personnes sur Terre. C'est beaucoup, oui.

4. A l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année les 9 milliards d'habitants seront atteints.

   Ici, on fait le chemin inverse. On cherche le n pour lequel le u_n sera de 9.

   $$9 = 6,9 \times (1,01)^n$$

   On résous l'équation à la calculatrice ou à la main (mais ce n'est pas de votre niveau) pour trouver : $n \simeq 26,7$ que l'on arrondi 27.
   Donc, c'est en $2010 + 27 = 2037$ que nous serons 9 milliard sur Terre, toujours en considérant que le taux d'accroissement se maintienne.